УДК 004.92
DOI https://doi.org/10.32782/tnv-tech.2024.4.6

ПРОЄКТУВАННЯ ТА РОЗРОБКА ВЕБСИСТЕМИ ДЛЯ ПОБУДОВИ ФРАКТАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Завгородній В. В. *– доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій Державного університету інфраструктури та технологій*
ORCID ID: 0000-0002-8347-7183

Завгородня Г. А. *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій Державного університету інфраструктури та технологій*
ORCID ID: 0000-0001-8523-1761

Яськов Н. В. *– магістр кафедри інформаційних технологій Державного університету інфраструктури та технологій*
ORCID ID: 0009-0000-3864-4715

У статті детально висвітлено процес розробки вебсистеми для моделювання та візуалізації фрактальних зображень, що базується на сучасних математичних моделях фрактальних множин. Основною метою дослідження є створення інструменту для інтерактивної побудови фракталів, що дозволяє користувачам налаштовувати параметри моделей, досліджувати їх властивості та візуалізувати результати в реальному часі.

У рамках роботи було вирішено кілька ключових завдань. Було виконано аналіз теоретичних моделей фрактальних множин, серед яких множина Мандельброта, папороть Барнслі та крива Коха. Вивчено основні властивості цих моделей, такі як самоподібність, нескінченна детальність та фрактальний вимір, що є визначальними для фрактальних об'єктів. Особлива увага приділена дослідженню алгоритмів, які описують процес побудови фракталів.

Було розроблено та впроваджено кілька алгоритмів моделювання фрактальних структур. Використано методи ітераційної функції систем (IFS), а також інші підходи до генерації фрактальних зображень. Алгоритми були протестовані з точки зору ефективності та стабільності, а також досліджено їх здатність генерувати фрактали з різним ступенем складності. Оцінено їх обчислювальну ефективність та можливість масштабування для побудови великих структур.

Було створено вебсистему, яка інтегрує розроблені алгоритми моделювання та забезпечує користувачам зручний інтерфейс для управління параметрами фракталів. Система дозволяє змінювати типи фракталів, налаштовувати кількість ітерацій, масштаб, кольорові схеми та інші параметри, що впливають на побудову та візуалізацію фрактальних структур.

Було проведено тестування вебсистеми на прикладах різних фрактальних структур, таких як множина Мандельброта, папороть Барнслі та крива Коха. Проведено візуальний аналіз отриманих зображень, перевірено точність та стабільність алгоритмів при зміні вхідних даних. У результаті тестування виявлено можливість генерації широкого спектру фрактальних зображень, що підтверджує працездатність і надійність розробленої системи.

Ключові слова: *фрактальні структури, фрактальні моделі, алгоритми, перетворення, вебсистема.*

Zavgorodnii V. V., Zavgorodnya A. A., Yaskov N. V. Design and development of a web system for creating fractal images

The article describes in detail the process of developing a web system for modeling and visualization of fractal images, based on modern mathematical models of fractal sets. The main goal of the research is to create a tool for interactive construction of fractals, which allows users *to adjust model parameters, explore their properties and visualize the results in real time. As part of the work, several key tasks were solved.*

An analysis of theoretical models of fractal sets was performed, including the Mandelbrot set, the Barnsley fern, and the Koch curve. The main properties of these models, such as self-similarity, infinite detail and fractal dimension, which are defining for fractal objects, were studied. Special attention is paid to the study of algorithms that describe the process of constructing fractals.

Several fractal structure modeling algorithms have been developed and implemented. Methods of iterative function of systems (IFS), as well as other approaches to the generation of fractal images, were used. The algorithms were tested for efficiency and stability, and their ability to generate fractals of varying degrees of complexity was investigated. Their computational efficiency and scalability for the construction of large structures were evaluated.

A web system was created that integrates the developed modeling algorithms and provides users with a convenient interface for managing fractal parameters. The system allows you to change the types of fractals, adjust the number of iterations, scale, color schemes and other parameters that affect the construction and visualization of fractal structures.

The web system has been tested on examples of various fractal structures such as the Mandelbrot set, the Barnsley fern and the Koch curve. A visual analysis of the obtained images was carried out, the accuracy and stability of the algorithms when changing the input data was checked. As a result of testing, the possibility of generating a wide range of fractal images was revealed, which confirms the efficiency and reliability of the developed system.

Key words: *fractal structures, fractal models, algorithms, transformation, web system.*

Постановка проблеми. Теорія фракталів на сьогоднішній день набула значної популярності та широкого застосування в різноманітних галузях науки і техніки. Фрактальні структури зустрічаються в природі, і їх властивості успішно використовуються у багатьох практичних задачах. Наприклад, фрактальні моделі допомагають у вирішенні задач аналізу турбулентних потоків у рідинах, що є критично важливим для аеродинаміки та гідродинаміки. Також вони знайшли своє місце у радіолокації, де дозволяють більш точно моделювати складні процеси розсіювання радіохвиль, зокрема в умовах складних атмосферних явищ.

Крім того, фрактальні моделі застосовуються в галузі цифрової обробки інформації. Завдяки їх здатності ефективно описувати структури, які повторюються на різних масштабах, вони стають корисними для розпізнавання образів, стиснення зображень і сигналів, а також при генерації реалістичних текстур у комп'ютерній графіці.

Останнім часом фрактальна геометрія також знаходить своє застосування у дослідженні фінансових ринків. Багато процесів, що відбуваються на фінансових ринках, мають хаотичну природу, яку можна моделювати фрактальними алгоритмами для прогнозування і аналізу поведінки активів. У матеріалознавстві фрактали також використовуються для створення нових матеріалів з заданими властивостями на нано- і мікрорівнях.

Однак, не зважаючи на значний інтерес до фрактальних структур, на сьогоднішній день існує певний дефіцит простих та доступних інструментів для побудови та дослідження фракталів у вебсередовищі. Більшість програмного забезпечення або є складним у використанні, або вимагає спеціалізованих знань у галузі математичного моделювання та програмування. Тому постає питання розробки вебсистеми, яка дозволить користувачам легко генерувати фрактальні зображення, досліджувати їхні властивості та вивчати математичні аспекти фракталів без необхідності заглиблюватися у складні технічні деталі.

У цьому контексті проєктування та розробка такої вебсистеми може бути не тільки корисним інструментом для науковців, дослідників та інженерів, але й для освітніх установ та студентів, що бажають ознайомитися з фракталами, як з частиною сучасної науки і техніки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним з найпопулярніших напрямків досліджень є використання фракталів для моделювання природних явищ. У роботі [1] фрактали використовуються для опису турбулентних потоків та хаотичних процесів у динаміці рідин. Це допомогло науковцям краще зрозуміти природу турбулентності і сприяло розвитку аеродинамічних досліджень.

Сучасні дослідження в галузі обробки зображень та сигналів активно застосовують фрактальні алгоритми. Вони використовуються для стискання даних, розпізнавання образів, текстурного аналізу та генерації реалістичних зображень. У роботах [2, 3] детально розглядають фрактальні перетворення у контексті цифрової обробки зображень.

У фінансовій математиці застосування фракталів дозволяє моделювати складні, хаотичні процеси, характерні для ринкових коливань. У роботах [4, 5] детально розглянуто природу фінансових ринків з точки зору фрактальної геометрії, що стало основою для подальших досліджень у цій сфері. Роботи більш сучасних дослідників демонструють, як фрактальні методи можуть бути використані для прогнозування цінних паперів та аналізу ризиків.

Фрактали також широко застосовуються у створенні реалістичних текстур і моделей для комп'ютерних симуляцій. Роботи [6, 7] демонструють використання фракталів для генерації ландшафтів, хмар, дерев та інших природних об'єктів у комп'ютерних іграх та віртуальних середовищах. Це дозволяє значно полегшити процес моделювання складних структур у графічних додатках.

З аналізу сучасних публікацій стає очевидним, що фрактальна геометрія продовжує залишатися важливою темою досліджень, зосереджуючись на різних сферах науки та технологій. Хоча вже існують численні інструменти для візуалізації та моделювання фрактальних структур, залишається нагальна потреба у створенні більш доступних вебінтерфейсів для роботи з фракталами. Це відкриває нові можливості для популяризації фрактальної геометрії та розширення її застосування у навчанні та наукових дослідженнях.

Формулювання цілей статті. Мета статті полягає у дослідженні математичних підходів до моделювання фракталів та розробці вебсистеми, яка дозволяє візуалізувати фрактальні зображення. Це завдання включає кілька ключових етапів, пов'язаних із теоретичним аналізом та практичною реалізацією алгоритмів, що дозволяють створювати та досліджувати фрактальні структури.

Досягнення поставлених цілей дозволить отримати нові знання про фрактальні структури, підвищити ефективність їх моделювання та створити інструмент для інтерактивної візуалізації фракталів, доступний через вебінтерфейс.

Виклад основного матеріалу. Сьогодні існує безліч програмних рішень для побудови та візуалізації фрактальних зображень. Такі програмні пакети, як *Apophysis*, *Mandelbrot Explorer*, та *Ultra Fractal* дозволяють користувачам досліджувати різні фрактальні структури і властивості. Однак більшість з них є дескотпними додатками, що обмежує їх використання в мережевих середовищах. Нещодавні дослідження фокусуються на створенні вебсистем для інтерактивної побудови фракталів, що дозволяє зробити ці інструменти доступними для ширшої аудиторії. Розглянемо більш детально алгоритми побудови фракталів, які лягли в основу розроблюваної вебсистеми.

1. Алгоритм побудови множини Мандельброта полягає у створенні послідовності чисел за допомогою рівняння:

$$C_{n+1} = C_n^2 + c_0 \tag{1}$$

Якщо дана послідовність не перевищує меж двох комплексних чисел $C_1(1,1_i)$ і $C_2(-1,-1_i)$, то комплексне число c_0 належить множині Мандельброта. Це означає, що множина Мандельброта включає всі значення c_0, для яких розглянута послідовність залишається в межах комплексних чисел C_1 і C_2.

Множина Мандельброта розташована між комплексними числами $C_1(1,1_i)$ і $C_2(-1,-1_i)$, тому система координат буде центруватися в точці $(0;0)$, з межами для осей абсцис та ординат від -1.0 до 1.0. Була написана функція, яка перевіряє належність точки на комплексній площині до множини. Ця функція виконує цикл, і збільшення кількості ітерацій підвищує точність результату (чим більше ітерацій, тим менше точок належить до множини). Якщо точка належить до множини, функція повертає *true*, інакше – *false*.

Щоб додати кольори, було використано схему *HSL*. Замість булевого значення, функція повертає числове, яке залежить від кількості ітерацій, необхідних для визначення, чи належить точка до множини. Якщо точка належить до множини, функція повертає значення $\frac{i}{\text{maxIterations}}$, де *i* – це кількість ітерацій, а *maxIterations* – максимальна кількість ітерацій, що встановлюється користувачем. Далі інша функція малює точку з відповідним кольором. Зміна параметрів у схемі *HSL* змінює кольорову палітру. Таким чином, можна отримати різні зображення фракталів. Для реалізації було використано мову програмування *JavaScript*. На рисунку 1 побудовано фрактал із 40 ітераціями, масштабом 1x та зміненою кольоровою палітрою.

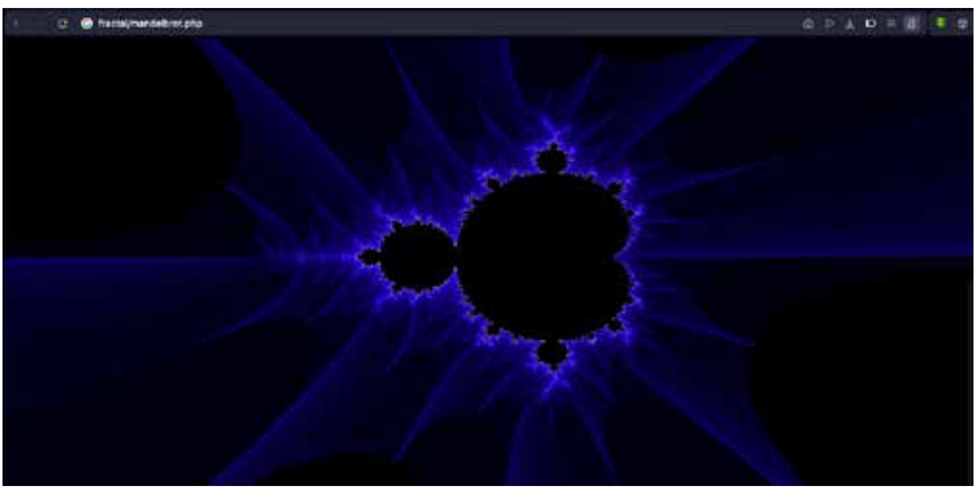

Рис. 1. Фрактал Мандельброта

2. Папороть Барнслі будується за допомогою чотирьох афінних перетворень наступного виду:

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{2}$$

Для побудови використовувалась матриця значень, розроблена М. Барнслі (табл. 1).

Таблиця 1

Матриця значень

w	a	b	c	d	e	f	p
***f*1**	0	0	0	0.16	0	0	0.01
***f*2**	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
***f*3**	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
***f*4**	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

У таблиці 1 стовпці $a - f$ є коефіцієнтами рівняння, p – коефіцієнт ймовірності, x та y – координати. Дана таблиця відповідає наступним афінним перетворенням:

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}0.00 & 0.00\\ 0.00 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}0.85 & 0.04\\ -0.04 & 0.85\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00\\ 1.60\end{bmatrix}$$

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}0.20 & -0.26\\ 0.23 & 0.22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00\\ 1.60\end{bmatrix}$$

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}-0.15 & 0.28\\ 0.26 & 0.24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00\\ 0.44\end{bmatrix}$$

Алгоритм побудови папороті Барнслі:

1. Визначити початкову точку на початку координат ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$).

2. Обчислити коефіцієнт ймовірності p. На кожній ітерації обчислюється нова точка A_1 за формулою

$$A_1\left(a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c, e\cdot x_0 + f\cdot y_0 + d\right),$$

де коефіцієнти обираються залежно від того, в який діапазон потрапляє значення p:

– якщо $p = 0.01$, то $x_n + 1 = 0$, $y_n + 1 = 0.16\, y_n$ (точка на основі стовбура);

– якщо p у проміжку 0...0.85, то $x_n + 1 = 0.85\, x_n + 0.04\, y_n$, $y_n + 1 = -0.04\, x_n + 0.85\, y_n + 1.6$. Це точки, які формують листя папороті, що лежать у червоному трикутнику;

– якщо p у проміжку 0.85...0.93, то $x_n + 1 = 0.2\, x_n - 0.26\, y_n$, $y_n + 1 = 0.23\, x_n + 0.22\, y_n + 1.6$ (точки синього трикутника);

– якщо p у проміжку 0.93...0.99, то $x_n + 1 = -0.15\, x_n + 0.28\, y_n$, $y_n + 1 = 0.26\, x_n + 0.24\, y_n + 0.44$ (точки трикутника, симетричного синьому).

На рисунку 2 зображено фрактал при 1 500 000 ітераціях, що демонструє густоту та форму листя папороті.

Змінюючи значення констант у таблиці, можна отримувати безліч різноманітних моделей, які відрізняються від папороті Барнслі.

3. Крива Коха – це фрактальна крива, вперше описана шведським математиком Хельге фон Кохом у 1904 році. Вона цікава тим, що є всюди неперервною, але ніде недиференційованою, тобто не має дотичних.

Побудова тріадної кривої Коха починається з одиничного відрізка (затравки), який замінюється геометричним елементом, наприклад, рівностороннім трикутником. При кожній наступній ітерації кожна ланка відрізка замінюється подібним трикутним елементом, утворюючи передфрактал n-го покоління.

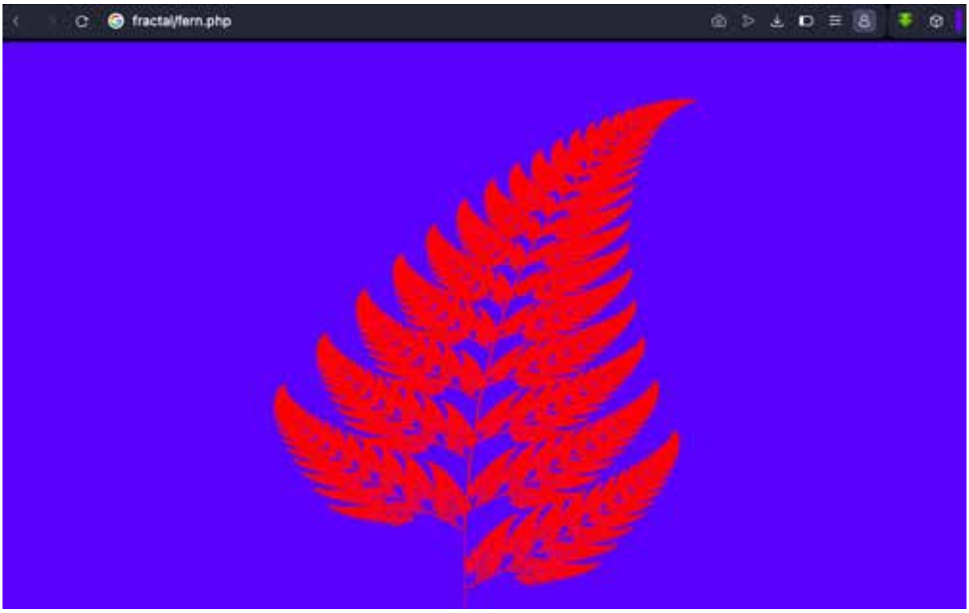

Рис. 2. Папороть Барнслі

Довжина кривої Коха з кожною ітерацією збільшується, і при нескінченній кількості ітерацій крива стає нескінченно довгою, але займає скінченну площу. Фрактальна розмірність кривої Коха дорівнює $\frac{log4}{log3} \approx 1.2619$, що більше за її топологічну розмірність, яка дорівнює 1. Це підтверджує, що крива Коха є фрактальною множиною. Таким чином, крива Коха демонструє властивості фракталів, зокрема нескінченну складність і самоподібність на всіх масштабах.

Алгоритм побудови кривої Коха:

1. Починаємо з одиничного відрізка.

2. Поділяємо цей відрізок на три рівні частини та замінюємо середній сегмент рівностороннім трикутником, виключивши середню частину. В результаті отримуємо ламану лінію, що складається з чотирьох сегментів, кожен з яких має довжину 1/3 від початкового відрізка.

3. Повторюємо цю операцію для кожного з новоутворених сегментів.

Кількість виконаних повторів алгоритму залежить від кількості ітерацій, вказаних користувачем. Основою програми є рекурсивна функція, яка обчислює параметри для кожного сегмента, що входить до складу кривої Коха. На рисунку 3 представлено фрактал, побудований при 5 ітераціях.

Таким чином, дане дослідження робить внесок у галузь комп'ютерної графіки та математичного моделювання, пропонуючи нові можливості для інтерактивного дослідження фракталів та їх властивостей через вебінтерфейс.

Рис. 3. Крива Коха

Висновки. Фрактали мають надзвичайно широку область застосування, починаючи від комп'ютерної графіки та медицини, закінчуючи природничими науками й телекомунікаціями. Їхнє використання дозволяє зручно та ефективно моделювати складні, неевклідові об’єкти, часто схожі на природні форми, за допомогою кількох коефіцієнтів. Завдяки цьому фрактальні моделі знайшли широке застосування там, де необхідно зобразити складні поверхні або структури з мінімальними обчислювальними витратами.

Як результат, була розроблена вебсистема, яка надає можливість не лише генерувати фрактали, але й досліджувати процес їх побудови через зміни параметрів моделі. Це дає можливість отримувати різноманітні фрактальні зображення, експериментуючи з параметрами побудови. Таким чином, вебсистема стає ефективним інструментом для дослідження фрактальних структур і їхньої візуалізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature / Revised and enlarged edition. *New York. W.H. Freeman and Co.* 1983. 495 p.

2. Barnsley M.F. Fractals everywhere. *Academic press.* 2014. 560 p.

3. Gleick, J. Chaos: Making a new science. *Penguin*. 2008. 384 p.

4. Xu C., Ke J., Peng Z., Fang W., Duan Y. Asymmetric Fractal Characteristics and Market Efficiency Analysis of Style Stock Indices. *Entropy*. 2022. 24(7):969. https://doi.org/10.3390/e24070969

5. Abdulgaffar Muhammad, John Nma Aliyu, Adedokun Lateef Adetunji, Anthony Kolade Adesugba, Micah Ezekiel Elton Mike, Mohammed Abdulmalik. Fractal Geometry in High-Frequency Trading: Modeling Market Microstructure and Price Dynamics. *Saudi J Econ Fin.* 2023. 7(11): 484-488. DOI: https://doi.org/10.36348/sjef.2023.v07i11.002

6. Nutu C.S., Axinte T. Microelectronics and nanotechnology, and the fractal-like structure of information, knowledge, and science. In *Advanced Topics in Optoelectronics, Microelectronics, and Nanotechnologies VIII*. 2016. Vol. 10010 P. 394-402). SPIE. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2240114

7. Bukharov D.N., Arakelian S.M. Fractal model of "breakthrough" innovation in nanotechnology. *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 896. No. 1. P. 012122. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012122

REFERENCES:

1. Mandelbrot, B.B. (1983). The fractal geometry of nature / Revised and enlarged edition. *New York. W.H. Freeman and Co.* 495 p.

2. Barnsley, M.F. (2014). Fractals everywhere. (2014). *Academic press.* 560 p.

3. Gleick, J. (2008). Chaos: Making a new science. *Penguin*. 384 p.

4. Xu, C., Ke, J., Peng, Z., Fang, W., Duan, Y. (2022). Asymmetric Fractal Characteristics and Market Efficiency Analysis of Style Stock Indices. *Entropy*. 24(7):969. https://doi.org/10.3390/e24070969

5. Abdulgaffar Muhammad, John Nma Aliyu, Adedokun Lateef Adetunji, Anthony Kolade Adesugba, Micah Ezekiel Elton Mike, Mohammed Abdulmalik. (2023). Fractal Geometry in High-Frequency Trading: Modeling Market Microstructure and Price Dynamics. *Saudi J Econ Fin.* 7(11): 484-488. DOI: https://doi.org/10.36348/sjef.2023.v07i11.002

6. Nutu, C.S., Axinte, T. (2016). Microelectronics and nanotechnology, and the fractal-like structure of information, knowledge, and science. In *Advanced Topics in Optoelectronics, Microelectronics, and Nanotechnologies VIII*. Vol. 10010 P. 394-402). SPIE. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2240114

7. Bukharov, D.N., Arakelian, S.M. (2020). Fractal model of "breakthrough" innovation in nanotechnology. *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 896. No. 1. P. 012122. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012122