УДК 517.272, 517.912
DOI https://doi.org/10.32782/tnv-tech.2024.6.28

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ СУДНОПЛАВСТВА ТА ГІДРОТЕХНІЧНОГО БУДІВНИЦТВА

Соколовська Г. В. *– старший викладач кафедри математики, фізики та астрономії Одеського національного морського університету*
ORCID ID: 0000-0001-8161-1660

Процеси, що відбуваються у світовій економіці, зокрема подорожчання енергоносіїв, актуалізація проблем екології, активізують пошук найефективніших способів доставки вантажів. У цьому сенсі морський транспорт має багато переваг і є дуже перспективним. У судноплавній галузі актуальною є задача оптимізації маршрутів, щоб мінімізувати транспортні витрати та зменшити час на доставку вантажів. Не менш важливими у зв'язку з цим є проблеми управління водними ресурсами, будівництва портів та прокладання водних шляхів, будівництва берегових, портових та морських гідротехнічних споруд. Основними завданнями гідротехнічного будівництва є підвищення міцності конструкцій та оптимізація витрат на їх спорудження. Математичні методи та моделі відіграють провідну роль у інженерних дослідженнях. Побудова математичної моделі передбачає виділення основних чинників досліджуваного процесу (вибір його параметрів та характеристик), визначення зв'язку між ними. Створення математичної моделі завершується тим, що вказані зв'язки записуються в аналітичній формі. Отримана цільова функція разом з додатковими умовами (рівняннями та нерівностями) досліджується методами математичного аналізу, зокрема теорії диференціальних рівнянь. Важливим етапом розв'язування задачі є аналіз отриманих результатів.

В роботі розглядаються деякі задачі гідротехнічного будівництва: питання про тиск води на греблю або шлюз та задача про розташування ґрунтових вод у дренажній системі. Розглянуто також задачі, що стосуються руху та маневрування суден, зокрема питання пошуку підводного човна за допомогою морського дрона, задача про рух двох кораблів відносно один одного. Задача про хитавицю судна є одним з питань теорії корабля. Для кожної з цих задач створено і досліджено відповідну математичну модель. Розгляд вказаних задач у курсі вищої математики сприяє кращому розумінню зв'язку математичної теорії з практикою та її значення у дослідженні фізичних процесів та інженерії.

Ключові слова: *функція, диференціальна модель, оптимальний маршрут, гідротехнічна споруда.*

Sokolovska H. V. Mathematical models of some problems of shipping and hydraulic engineering construction

The processes taking place in the global economy, including rising energy prices and environmental issues, are intensifying the search for the most efficient ways to deliver goods. In this sense, maritime transport has many advantages and is very promising. In the shipping industry, the task of optimizing routes to minimize transportation costs and reduce the time for cargo delivery is a pressing one. Equally important in this regard are the problems of water resources management, port construction and waterways, construction of coastal, port and marine hydraulic structures. The main tasks of hydraulic engineering construction are to increase the strength of structures and optimize the cost of their construction. Mathematical methods and models play a leading role in engineering research. Building a mathematical model involves identifying the main factors of the process under study (selecting its parameters and characteristics) and determining the relationship between them. The creation of a mathematical model is completed by writing these relationships in an analytical form. The resulting objective function, together with additional conditions (equations and inequalities), is investigated by methods of mathematical analysis, in particular the theory of differential equations. An important stage in solving the problem is the analysis of the results.

The paper considers some problems of hydraulic engineering construction: the problem of water pressure on a dam or a sluice and the problem of the location of groundwater in the drainage system. The paper also considers problems related to the movement and maneuvering of ships, in particular, the problem of searching for a submarine using a marine drone, the problem of the movement of two ships relative to each other. The ship pitching problem is one of the questions of ship theory. For each of these problems, a corresponding mathematical model was created

and studied. The consideration of these problems in a higher mathematics course contributes to a better understanding of the connection between mathematical theory and practice and its importance in the study of physical processes and engineering.
Key words: *function, differential model, optimal route, hydraulic structure.*

Постановка проблеми. Морські технології та водна інженерія з давніх давен нерозривно пов'язані з математикою. Математичні методи [1] є незамінним інструментом у інженерних розрахунках. Математичне моделювання застосовується для розв'язування багатьох задач механіки рідин та газів [2]. У технічному університеті математична освіта є не лише базовим елементом професійної освіти, вона сприяє розвитку мислення, отриманню необхідних навичок та компетентностей. Дослідники методики викладання математики [3] підкреслюють необхідність надання математичній освіті у технічному університеті більшої професійної спрямованості за умов збереження достатнього наукового рівня викладання. У зв'язку з цим виникає потреба у створенні математичних моделей таких прикладних задач, що не вимагають від студента серйозної фахової підготовки і можуть бути включені в курс вищої математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження дискретних та неперервних математичних моделей, проведене в монографії [4], характеризується широтою охоплення тем, розмаїттям прикладів починаючи від проблем економіки та моделей бойових дій до питань медицини та психології. Робота [5] присвячена моделям оптимізації гідродинамічного проектування форми корпусу судна. У статті [6] розглянуто застосування математичних методів в задачах архітектури та будівництва.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є математичне моделювання задач, гідротехнічного будівництва та судноплавства для використання їх в курсі вищої математики.

Виклад основного матеріалу. Найбільше можливостей у складанні прикладних задач або переосмисленні вже відомих надає диференціальне та інтегральне числення, теорія диференціальних рівнянь [7]. Розглянемо низку задач, що надають практичного змісту деяким питанням диференціального числення.

Задача 1. Два судна рухаються уздовж прямих, кут між якими дорівнює 60^0. Одне знаходиться на відстані 12 км від точки перетину прямих і рухається до неї зі швидкістю 40 км/год, друге – на відстані 11 км і віддаляється від точки перетину зі швидкістю 10 км/год. З якою швидкістю у цей момент кораблі наближаються або віддаляються один від одного?

Позначимо через $\hat{I}$ точку перетину прямих. Нехай $\tilde{o}$ та z – відстані першого та другого кораблів відповідно від цієї точки (рис. 1).

Відстань між суднами z можна знайти за теоремою косинусів:
$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^0$, отже $z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$.

Тоді швидкість, з якою змінюється ця відстань, $\frac{dz}{dt}$, обчислюється як похідна від складеної функції:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x - y}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}\frac{dx}{dt} + \frac{2y - x}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}\frac{dy}{dt}.$$

Для вказаного моменту часу t_0 маємо: $\tilde{o}(t_0) = 12$, $y(t_0) = 11$, швидкості кораблів: $\frac{dx}{dt} = -40$, $\frac{dy}{dt} = 10$ – сталі. Отже,

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{2\cdot 12 - 11}{2\sqrt{12^2 + 11^2 - 12\cdot 11}}\cdot(-40) + \frac{2\cdot 11 - 12}{2\sqrt{12^2 + 11^2 - 12\cdot 11}}\cdot 10 = -\frac{210}{\sqrt{133}}.$$

Таким чином, у вказаний момент t_0 функція $z(t)$ спадає (кораблі зближуються) зі швидкістю $\frac{210}{\sqrt{133}}$ км/год. Зауважимо, що є момент часу, коли кораблі не наближаються й не віддаляються один від одного, у цей момент маємо: $\frac{dz}{dt}=0$. Ця рівність виконана при $\frac{-(2x-y)40+(2y-x)10}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}}=0$ тобто $-3\tilde{o}+2\acute{o}=0$. Якщо тепер початковим моментом руху кораблів вважати t_0, то закон руху першого судна має вигляд: $\tilde{o}=12-40t$, другого: $\acute{o}=11+10t$. Отже $t=\frac{12-x}{40}=\frac{y-11}{10}$, що означає: $\tilde{o}+4\acute{o}=56$. Тому залишається розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases}-3\tilde{o}+2\acute{o}=0,\\ x+4y=56.\end{cases}$ Одержимо: $\tilde{o}=8,\ \acute{o}=12$. Отже, після 6 хвилин руху, коли перший корабель знаходитиметься на відстані 8 км від точки $\hat{I}$, а другий – на відстані 12 км, кораблі не наближаються й не віддаляються. Після цього моменту кораблі починають віддалятися один від одного. Це випливає з властивостей функції двох змінних $z=\sqrt{x^2+y^2-xy}$ або однієї змінної t: $z=\sqrt{2100t^2-420t+133}$, яку ми одержуємо, підставивши $\tilde{o}=12-40t$ та $\acute{o}=11+10t$. В неї є лише одна критична точка, адже її похідна $\frac{dz}{dt}=\frac{2100t-210}{\sqrt{2100t^2-420t+133}}$ має тільки один нуль $t=\frac{1}{10}$ год (6 хв) й при $t>\frac{1}{10}$ є додатною.

Особливе місце у прикладних задачах посідають так звані диференціальні моделі тобто математичні моделі, що зводяться до дослідження диференціальних рівнянь.

Задача 2. Нехай у деякий момент часу підводний човен помічено на відстані трьох миль від морського дрона. Човен одразу занурився і пішов у невідомому напрямку. Потрібно визначити таку траєкторію руху дрона, щоб у певний час він обов'язково опинився над човном. Відомо, що швидкість дрона удвічі більша за швидкість човна r.

Введемо полярні координати r та φ таким чином, щоб полюс $\hat{I}$ збігався з точкою, де було помічено човна, полярна вісь проходить через точку, де у цей момент знаходився дрон. Спершу дрон має зайняти таку позицію, щоб він та човен знаходилися на одній відстані від полюса, а потім йому потрібно рухатися навколо полюса уздовж такої траєкторії, щоб рівновіддаленість його та човна від полюса зберігалась. У цьому випадку дрон обов'язково пройде над човном. Отже, спочатку потрібно йти прямим курсом до точки $\hat{I}$, поки дрон не опиниться на тій же відстані x від полюса, що й човен. Цю відстань можна знайти з рівняння $\frac{x}{v}=\frac{3-x}{2v}$ або з рівняння $\frac{x}{v}=\frac{3+x}{2v}$. Отже, ця відстань дорівнює або одній або трьом милям. Тепер, якщо «зустріч» не відбулася, дрон має обертатися (у будь-якому напрямі) навколо полюса $\hat{I}$, віддаляючись від нього зі швидкістю підводного човна v.

Розкладемо вектор швидкості дрона $2\overline{v}$ на дві складові: радіальну $\overline{v}_r$ (направлену від полюса до дрона) та тангенціальну $\overline{v}_{\hat{O}}$ (поперечну) (рис. 2).

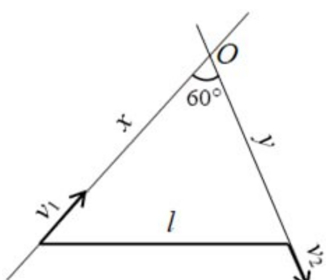

Рис. 1

Радіальна складова – це швидкість, з якою дрон віддаляється від полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$, тобто $v_r = \frac{dr}{dt}$, тангенціальна швидкість – це лінійна швидкість обертання дрона навколо полюса, що, як відомо, є добутком кутової швидкості та полярного радіуса: $v_{\text{Ò}} = r\frac{d\varphi}{dt}$. Оскільки $v_r = v$, то за теоремою Піфагора маємо: $v_{\text{Ò}} = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$.

Отриману систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = v,\ r\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{3}v$$

зводимо до одного рівняння з відокремленими змінними $\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\sqrt{3}}$ шляхом виключення змінної t. Його загальний розв'язок має вигляд $r = Ce^{\varphi/\sqrt{3}}$, де $\tilde{N}$ – довільна стала. Тепер, враховуючи, що дрон починає обертатися навколо полюса з точки $\varphi = 0, r = 1$ або $\varphi = \pi, r = 3$, маємо два види початкових умов, що дають відповідно такі значення сталої: $\tilde{N} = 1$ та $\tilde{N} = 3e^{-\pi/\sqrt{3}}$. Отже, для виконання бойової задачі маємо обрати одну з двох стратегій:

1) спочатку пройти прямим курсом до місця, де було помічено підводного човна, 2 милі а потім рухатися уздовж спіралі $r = e^{\varphi/\sqrt{3}}$, поки морський дрон не опиниться над підводним човном;

2) пройти прямим курсом 6 миль а потім рухатися уздовж спіралі $r = 3e^{(\varphi-\pi)/\sqrt{3}}$.

Задача 3. Корабель зупинився у тихій воді, накренившись на кут α , після чого почав рівномірно похитуватись по інерції. При цьому відомо, що швидкість зміни кута відхилення корабля φ від стану рівноваги змінюється за законом $v = -2\varphi - \varphi^2$. Визначити $\varphi(t)$.

З механічного змісту похідної випливає, що $v = \frac{d\varphi}{dt}$. Тоді шукана функція $\varphi(t)$ задовольняє диференціальне рівняння $\frac{d\varphi}{dt} = -2\varphi - \varphi^2$, що є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайдемо його загальний розв'язок: $\frac{d\varphi}{\varphi^2 + 2\varphi} = -dt$ $\Leftrightarrow \int \frac{d\varphi}{(\varphi+1)^2 - 1} = -\int dt \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varphi}{\varphi+2}\right| = -t + C$ або $\frac{\varphi}{\varphi+2} = \tilde{N}e^{-2t}$

($\tilde{N}$ – довільна стала). Враховуючи початкову умову $\varphi = \alpha$ при $t = 0$, маємо: $\frac{\alpha}{\alpha+2} = \tilde{N}e^0$. Розв'язок задачі Коші: $\frac{\varphi}{\varphi+2} = \frac{\alpha}{\alpha+2}e^{-2t}$. Виразивши φ з останнього рівняння, одержимо явну залежність кута нахилу від часу: $\varphi = \frac{2\alpha}{(\alpha+2)e^{2t} - \alpha}$. Як бачимо, $\varphi \to 0$ якщо $t \to +\infty$, отже хитавиця з часом вщухає.

У архітектурі та будівництві також широко використовуються математичні методи. Дослідження ґрунтових вод, що впливають на фундаментні конструкції, є однією з найважливіших задач гідротехнічного будівництва. Для зниження рівня ґрунтових вод будують дренажні колодязі. Математичну основу для цих досліджень становить векторний аналіз, теорія поля. Однак, деякі нескладні питання можна запропонувати студентам, які не знайомі поки що з теорією поля.

Задача 4. Визначити рівняння кривої, вздовж якої проходить рівень ґрунтових вод поблизу круглого колодязя з непроникним шаром ґрунту на дні (рис. 3). Відомо, що швидкість v течії води у точці P фільтруючого шару пропорційна нахилу шуканої кривої у точці P_1, розташованої на одній вертикалі з P. Діаметр колодязя дорівнює $2r$, висота води у ньому – h .

На рисунку 3: AB – поверхня землі, CD – рівень водонепроникного шару, EF – рівень води в колодязі, FN та FN – криві рівня ґрунтових вод за наявності колодязя. Поверхня рівня ґрунтових вод є поверхнею обертання кривої FN (або ME) навколо осі Î ó. Шукатимемо рівняння $y = y(x)$ кривої FN. Кутом нахилу кривої до осі абсцис називають кут нахилу її дотичної до додатного напряму осі Î õ (тангенс цього кута дорівнює $\frac{dy}{dx}$).

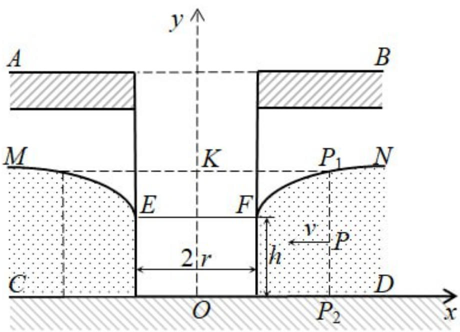

Рис. 3

За умовою $v=k\frac{dy}{dx}$, k – коефіцієнт пропорційності. Розглянемо циліндр, утворений обертанням прямокутника OKP_1P_2 навколо осі $\hat{I}\ \acute{o}$. Через його бічну поверхню протікає така кількість води: $Q=S_{\acute{a}^{3}\div}v$ (вона називається витратою потоку). Знайдемо бічну поверхню циліндра: $S_{біч}=2\pi xy$. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно $y(x)$:

$$2\pi \tilde{o}\acute{o}k\frac{dy}{dx}=Q\cdot$$

Розв'яжемо його: $2\pi \tilde{o}\acute{o}k\frac{dy}{dx}=Q \Leftrightarrow \acute{o}dy=\frac{Q}{2\pi k}\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \acute{o}dy=\frac{Q}{2\pi k}\int\frac{dx}{x}$. Загальний інтеграл рівняння: $y^2=\frac{Q}{\pi k}\ln x+C, C-$ довільне дійсне число. Звернімо увагу на те, що при $\tilde{o}=r$ маємо: $y=h$. Скористаймося цим як початковою умовою: $h^2=\frac{Q}{\pi k}\ln r+C$, звідки $C=h^2-\frac{Q}{\pi k}\ln r$. Отже, шукане рівняння кривої FN має вигляд: $\acute{o}^2=\frac{Q}{\pi k}\ln \tilde{o}-\frac{Q}{\pi k}\ln r+h^2$ або $y^2=\frac{Q}{\pi k}\ln\frac{x}{r}+h^2$.

Ще одна важливе питання гідротехнічного будівництва може бути запропоноване в курсі вищої математики – це задача дослідження тиску води на греблю.

Задача 5. Гребля має форму прямокутника, одна зі сторін якого $a=30$ м лежить на поверхні води, довжина вертикальної сторони $b=5$ м. На якій глибині потрібно розділити цей прямокутник горизонтальною прямою на дві частини так, щоб сила тиску води на них була однакова.

Введемо систему координат так, щоб вісь $\hat{I}\ \tilde{o}$ проходила уздовж вільної поверхні води, а вісь $\hat{I}\ \acute{o}$ була напрямлена перпендикулярно до неї углиб води. Згідно з законом Паскаля, сила тиску води на вузеньку смужку ширини dx, розташовану на глибині x, пропорційна добутку x та площі цієї смужки $30dx$: $dF=30\rho gxdx$ (ρ – густина води, g – прискорення вільного падіння). Сила тиску води на верхню відносно горизонтальної прямої $\int_0^{x_0}dF$ частину греблі виражається визначеним інтегралом $\int_0^{x_0}dF$, а на нижню – інтегралом $\int dF$. Отже x_0 потрібно вибрати так, щоб виконувалась рівність:

$$30\rho g\int_0^{x_0}xdx=30\rho g\int_{x_0}^{5}xdx \text{ або } \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{x_0}=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^{5},$$

з якої знайдемо: x_0: $x_0^2=25-x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2=25 \Leftrightarrow x_0=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Отже, шукану лінію слід провести на глибині $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ м.

Ускладнимо задачу таким чином: на яких глибинах потрібно розділити греблю на n смужок так, щоб сила тиску води на усі смужки була однакова?

Нехай $x_k,\ k=1,2,...,n,$ – шукані глибини (x_n дорівнює висоті греблі b), p_k – шукані тиски ($p_1=p_2=...=p_n,\ p_1+p_2+...+p_n=p$, де p – сила тиску води на греблю). Зауважимо, що $p_1+p_2+...+p_k=\frac{kp}{n}$, тому маємо:

$$\int_0^{x_1} xdx+\int_{x_1}^{x_2} xdx+...+\int_{x_{k-1}}^{x_k} xdx=\frac{kp}{n}=\frac{k}{n}\int_0^b xdx \text{ або } \int_0^{x_k} xdx=\frac{k}{n}\int_0^b xdx\cdot$$

Тоді $\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{x_k}=\frac{k}{n}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b$. Остаточно одержимо: $x_k^2=\frac{k}{n}b^2$. Таким чином, лінії поділу мають бути проведені на таких глибинах $x_k=\sqrt{\frac{k}{n}}b,\ k=1,2,...,n.$

Висновки. Розвиток України як морської держави передбачає вдосконалення технологій та підвищення якості підготовки фахівців у морській галузі. Зміст математичної освіти в технічному університеті зазнає суттєвих змін, пов'язаних з новими освітніми стандартами, що вимагають від неї більшої професійної спрямованості. Розглянуті задачі прикладного характеру допомагають сформувати у студентів бачення того, як вони можуть застосувати математичні знання у своїй майбутній професійній діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Дубовой В. М., Квєтний Р. Н., Михальов О. І., і Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем. Вінниця: ПП «ТД Едельвейс», 2017. 804 с.

2. Колчунов В.І. Теоретична і прикладна гідромеханіка. Київ, 2004. 336 с.

3. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. Київ: НПУ, 2000. 210 с.

4. Banerjee S. Mathematical modeling. New York, 2021. 433 c. https://doi.org/10.1201/9781351022941

5. Yang C.&Huang F. (2016). An overview of simulation-based hydrodynamic design of ship hull forms. *Journal of Hydrodynamics*, 28(6), 947–960. https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60696-0

6. Сиваш С.Б., Соколовська Г.В. (2023). Вища математика в задачах будівництва та архітектури. *Наука і техніка сьогодні*, 14(28), 446-458. https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-14(28)-446-458

7. Кирилов С.О., Кусік Л.І., Сиваш С.Б., і Соколовська Г.В. Вища математика (частина 1). Київ: Глобус, 2020. 175 с.

REFERENCES:

1. Dubovoi V. M., Kvietnyi R. N., Mykhalov O. I., i Usov, A. V. (2017) Modeliuvannia ta optymizatsiia system [Modeling and optimization of systems]. Vinnytsia: PP «TD Edelveis», 804 p. [in Ukrainian].

2. Kolchunov V.I. (2004) Teoretychna i prykladna hidromekhanika [Theoretical and applied hydromechanics]. Kyiv, 336 p. [in Ukrainian].

3. Sliepkan, Z.I. (2000) Naukovi zasady pedahohichnoho protsesu u vyshchii shkoli [Scientific basis of the pedagogical process in higher education]. Kyiv: NPU, 210 p. [in Ukrainian].

4. Banerjee S. (2021) Mathematical modeling. New York, 433 p. [in English]. https://doi.org/10.1201/9781351022941

5. Yang C.&Huang F. (2016). An overview of simulation-based hydrodynamic design of ship hull forms. *Journal of Hydrodynamics*, 28(6), 947–960 [in English]. https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60696-0

6. Syvash S.B., Sokolovska H.V. (2023). Vyshcha matematyka v zadachakh budivnytstva ta arkhitektury [Higher mathematics in problems of construction and architecture]. *Nauka i tekhnika sohodni*, 14(28), 446-458. https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-14(28)-446-458

7. Kyrylov S.O., Kusik L.I., Syvash S.B., Sokolovska H.V. (2020) Vyshcha matematyka (chastyna 1) [Higher mathematics (part 1)]. Kyiv: Hlobus, 175 p. [in Ukrainian].